III- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{(3n)!}{n^n (2n)!}$.

1) En utilisant I-4)- montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $\ln(1+x) \geq \dfrac{x-1}{1+x}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .a- Montrer que pour tout $k \in \{1,2,.....,n\}$, on a : $\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right) \geq \dfrac{k}{3n}$.

b- Vérifier que : $\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right) = \ln(u_n)$ c- En déduire que : $\ln(u_n) \geq \dfrac{1}{6}(n+1)$

d- Déterminer alors la limite de u_n.

Exercice N°20 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}\ln x \ \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative de f dan un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1-a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe (C).
d) Tracer (C) en précisant la tangente à (C) en A.

2-Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose : $F_p(x) = \int_x^1 \sqrt{t}\left(\ln(t)\right)^p dt \quad où \quad x \in]0;1[$

a) Calculer $F_1(x)$ puis vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x) = -\dfrac{4}{9}$.

b) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et que pour tout réel $x \in]0;1[$, on a :

$F_{p+1}(x) = -\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\left[\ln(x)\right]^{p+1} - \dfrac{2}{3}(p+1)F_p(x)$.

c) Montrer par récurrence que $F_p(x)$ admet une limite finie $u_p = (-1)^p(p!)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+1}$ quand $x \to 0^+$.

Exercice N°21: I- Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^3 - 2\ln x$. Etudier les variations de g, calculer g(1) et en déduire le signe de g(x).

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \dfrac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que (C) admet une asymptote oblique D et étudier la position relative de (C) et D.

3) a- Soient α et ß deux réels tels que : 1 < α < ß, calculer : $I = \int_\alpha^\beta \dfrac{\ln x}{x^2} dx$.

b- Interpréter géométriquement I.

III- Soit $(U_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par : $U_n = \int_2^n \dfrac{\ln x}{x^2} dx$.

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Vérifier que pour tout n ≥ 2, on a : $U_n = \dfrac{1}{2}(1+\ln 2) - \dfrac{1}{n}(1+\ln(n))$ *calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Qarray.tn Agra Blech- Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...